誰發明了微積分

——兼談微積分基本定理

國立中正大學數學系◆張守德　副教授

Calculus 是什麼意思？

看到 *calculus* 這個字，大家知道這是「微積分」的意思，但是這個字在今天還有「結石」（如牙結石或腎結石）的意思。有些進口牙膏的盒子上會用英文寫著 “…*to prevent the build-up of calculus*…” 這樣的字句，這時候 *calculus* 指的就是牙結石。事實上，字首 *calc-* 有石灰的意思，而 *calculus* 這個字本來是個拉丁字，意思是小石頭。古時候的人會用這種小石頭來做為計算工具，隨著時間的流轉，這個字也就慢慢地衍生為「計算的方法」了。所以當萊布尼茲（*Gottfried Wilhelm Leibniz*，1646～1716）用 *Calculus* 來稱呼這一套他所發展出來的有系統有組織的數學計算方法，我覺得這個名稱是饒有意味的，充分地顯現出他比牛頓（*Sir Issac Newton*，1642～1727）更能理解這套計算方法的重要性與廣泛性。而微積分這套理論最大的貢獻，就是將數學平民化，不再只是少數天才之間的腦力激盪而已。

微積分基本定理

一般人都認為微積分是牛頓和萊布尼茲發明的，彷彿是他們兩人隻手創造出微積分的一切。實際上，微積分是由許多人不懈的努力，經過漫長的時間演變才發展完成，而牛頓和萊布尼茲只是使微積分的方法及概念成熟和系統化的大功臣。他們兩個人在微積分上面最重要的成就，是我們所說的「微積分基本定理」。長久以來，如何計算曲線上任意點的切線（微分，求導函數）和一塊任意區域的面積（積分，求反導函數）就是數學上兩個非常重要的課題，只是人們一直沒有看出兩者之間的關聯性。「微積分基本定理」就是將這兩個看起來毫無相關的重要概念統合在一起的劃時代的定理。下面我們用今天的語言來敘述一下這個定理：

微積分基本定理

假設 f 是在〔a，b〕這個閉區間上的一個連續函數，而且 c 是〔a，b〕上的一個點。對於任意 $x\in$〔a，b〕，定義 $F(x)=\int_c^x f(t)dt$。那麼對於所有在開區間（a，b）裡的點 x，函數 $f(x)$ 是函數 $F(x)$ 的導函數。

簡單地說，如果我們把一個函數先作積分再作微分，我們會回到原來的函數。因此當 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的導函數時，我們會稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數。也就是說，微分和積分是兩種相反的運算，嗯……，應該說幾乎是。實際上 $f(x)$ 有無窮多個反導函數，只要是和 $F(x)$ 相差一個常數的函數都是 $f(x)$ 的反導函數。〔a，b〕裡不同的 c 會定義出不同的反導函數，所有的反導函數會形成一個家族 $\{F(x)+C : C\in R\}$。當我們對 $f(x)$ 作積分，會得到某一個反導函數 $F(x)+C$，對這個反導函數再做一次微分，則會回到 $f(x)$。相反的，如果我們對 $f(x)$ 的任何一個反導函數 $F(x)+C$ 作微分，然後再作積分，我們則會回到（可能是不同的）一個反導函數 $F(x)+C'$。這就是微積分基本定理更深層的含意。

古希臘時代的微積分發展

微積分是如何誕生的？早在兩千四百多年前，古希臘的數學家就已經在使用「無窮小」（*infinitesimal*）的概念，並發展出「窮盡法」（*method of exhaustion*）來計算不規則形狀的面積。假設我們現在想要計算區域 R 的面積，所謂的「窮盡法」，就是在區域 R 內嵌入一系列（邊緣由多條直線組成）的多邊形，使得這些多邊形能夠越來越完全覆蓋住整個區域 R，而這些多邊形的面積自然會漸漸地逼近區域 R 的面積。當時將「窮盡法」使用得最精彩的人就是阿基米德（*Archimedes*，約西元前 287～212 年），阿基米德的方法看起來相當類似我們今天學到的積分。他在這方面最有名的結果，包括計算出被拋物線和直線圍起來區域的面積、圓面積、球體積及 π 的估計值等等。他利用計算單位圓的外切正九十六邊形的面積和內接正九十六邊形的面積，來得到 π 是介於 $3+\frac{1}{7}$（約 3.1429）和 $3+\frac{10}{71}$（約 3.1408）的一個數。阿基米德也是世界上第一個求出螺旋線（圓以外的曲線）的切線和寫出第一個無窮級數的人，但是對於要求嚴格證明的古希臘數學家（包含阿基米德自己）來說，「無窮小」的概念是充滿矛盾的。古希臘哲學家芝諾（*Zeno of Elea*，約西元前 490～430 年）就提出多個關於「無窮小」的詭說，我們以其中一個「飛箭詭說」來作為代表：

> 想像一枝飛行中的箭，將這枝箭飛行的時間分成無數個無法再分割的瞬間。觀察每個瞬間會發現箭都是靜止沒有移動的，既然時時刻刻箭都沒有移動，那麼在這整段時間內箭也必定沒有移動。

這個詭說充分表達古希臘人對於「無窮小」的困惑。「無窮小」到底是不是「零」？無數個「零」加在一起又是多少？即使是牛頓和萊布尼茲，對「無窮小」也是抱著打混仗的態度：希望它是非零的時候它就是非零，希望它是零的時候它又變成零。這個困境，一直要到十九世紀實數系統的建構以及關於極限的嚴格定義出現以後，才得以解決。

中國古代的微積分發展

中國古代的數學智慧結晶，從周代、秦代以來經過數代人的努力，在漢朝時被整理成《九章算術》，大約在東漢初年（西元 1 世紀）集結成書。書中僅列出例子及一般算法，沒有任何解釋，所以有許多人曾為它作過注釋，來提出簡單的證明或更正，其中最著名的有劉徽（西元 263 年，三國時期）和李淳風（西元 656 年，唐朝）。這本書在幾何上或許比不上希臘人，但是在算術與代數方面卻絕對勝出。書中包含分數的四則運算、輾轉相除法、開平方法、開立方法、畢氏定理、三角、負數和各種面積體積的求法。

我們用《九章算術》第五卷〈商功〉中的一個題目來作例子：

> 今有圓錐，下周三丈五尺，高五丈一尺，問積幾何？
>
> 荅曰：一千七百三十五尺一十二分尺之五。
>
> 術曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。

我們用白話文重新寫一遍：有一個圓錐底部的圓周為三十五尺（一丈＝十尺），高為五十一尺，請問體積是多少？答案是一千七百三十五又十二分之五平方尺。這題的作法是將底部圓周的平方乘上高再除以三十六（圓周率用的是三）（讀者可以自行檢查一下這個公式的正確性）。

這個作法，我們可以看出劉徽之前的古人已經知道怎麼求圓面積和圓柱體積，也知道圓錐體積是圓柱體積的三分之一。劉徽在《九章算術》第一卷的注釋中，用正 192 邊形的面積來估計 π 約為 3.141014，之後又用正 3072 邊形來估計 π 約為 3.14159，用的也是窮盡法，和阿基米德的方法基本上相同（註①），但是他對於 π 的估計比阿基米德更好、更精密。中國古代數學的成就真是熠熠生輝。

西元 1665 年之前微積分的發展

之後在印度（六世紀）、中東（十一世紀）甚或日本（十七世紀），微積分也有一些零星的發展，只是因為交通不便，資訊傳達困難，數學家們各自獨力奮鬥，難以建立完整的體系，要等到十七世紀的歐洲，我們才能看到較明顯的進步。由於古希臘幾何原本的影響，讓傳統西方數學家認為唯有幾何的論證方法才是嚴密純正的數學。代數作為一個有效的計算工具，並沒有得到應有的重視。這種現象直到笛卡兒（*René Descartes*，1596～1650）及費馬（*Pierre de Fermat*，1601～1665）倡導以代數的方法研究幾何問題之後，才漸漸改善。在費馬寫給笛卡兒的一封信裡曾經提到，要找到函數的最大值或最小值，只要找找哪裡有水平切線就可以了。他的方法基本上和我們今日所用的方法是一樣的，因此拉格朗日（*Joseph-Louis Lagrange*，1736～1813）認為費馬才是真正的微積分之父。費馬還用一個巧妙的方法將一般冪函數（*general power functions*）化成無窮級數來求出它們的積分，這一點對於牛頓和萊布尼茲而言，也是關於微積分基本定理一個非常重要的線索。

牛頓與萊布尼茲

據說牛頓於西元 1666 年開始微積分相關的工作，而萊布尼茲則是從西元 1674 年開始用另一種角度研究微積分。萊布尼茲在 1684 年出版了第一篇關於微積分的論文，1696 年由羅比達侯爵（*Guillaume François Antoine*，*Marquis de l'Hôpital*（註②），1661～1704）為他出版了一本微積分的書。反觀牛頓，只有私人手稿，一直到 1693 年才發表部分結果，還要等到 1704 年才發表完整的結果。牛頓在 1671 年寫的《通量方法》（*Method of Fluxions*），直到他死後九年，也就是在 1736 年才得以出版。如果以今日的標準來看，萊布尼茲可以得到發明微積分全部的功勞。但是在當時，誰才是真正發明微積分的人則引起學術界一場醜陋的戰爭。1711 年，牛頓的學生基爾（*John Keill*）起而指控萊布尼茲剽竊牛頓的成果，這場戰火一直延燒到萊布尼茲死後才停止，結果造成歐陸與英國學術界之間超過一世紀的裂痕。

牛頓在科學史上的地位，不需要我在這裡多作介紹，但是萊布尼茲的生平一般人是不大熟悉的。萊布尼茲是德國人，大學讀的是法律，對一般歐洲學者應有的古典訓練如哲學、數學、物理等也都有涉獵，在當時歐洲政治界和外交界都扮演重要的角色，在哲學史和數學史上也占有重要的地位。他不但在物理和科技上有極大的貢獻，在生物學、醫學、地質學、機率、心理學、語言學、資工等等超過四十種領域也都有超越時代的想法。

牛頓於 1665 年由劍橋畢業之後，大學因為瘟疫而關閉。牛頓回老家待了兩年，作出關於微積分、光學和重力定律等劃時代的成果。牛頓的老師巴羅（*Isaac Barrow*，1630～1677）已經給出一個求切線的方法，而且也注意到距離和速度是兩種相反的運算，因此牛頓是在他的引導之下，才能明確地敘述出微

積分基本定理（牛頓實在應該和巴羅分享發明微積分的功勞）。牛頓在 1666 年創造出「通量」（*fluxion*）這個名詞來代表導數，他用的符號是 $\dot{x}$ ，在今天某些工程或經濟的書裡還看得到。牛頓考慮一個粒子在曲線 $f(x, y)=0$ 上移動，他稱這個粒子的 x 坐標和 y 坐標為「流量」（*fluent*），那麼 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 這兩個通量代表的就是 x 和 y 的速度。每個點的切線斜率可以用 $\dot{y}/\dot{x}$ 來表示。如果知道每一個 x 的切線斜率，那麼牛頓可以用反微分來把 y 求出來，也可以用反微分來求面積。這是史上第一個版本的微積分基本定理。

牛頓沒有發表這項研究結果的原因至少有兩個，第一個原因跟巴羅有部分關係。因為幫巴羅出書的出版商破產，其他的出版商都對出版數學書籍敬而遠之，所以牛頓不容易出書，就連 1671 年寫的《通量方法》也要到 1736 年才能出版英譯本（原文是用拉丁文寫的）。另一個更重要的原因是因為他違背了純幾何的觀點，害怕當時其他數學家的批評與嘲笑，因而不願意發表。恐怕他也沒有看出這套理論的重要性，抑或是因為藏私，是否還有其他種種理由我們不得而知。

萊布尼茲在 1672 年代表他的主人美因茲選帝侯（*Elector of Mainz*）（註③）到巴黎作外交談判，但因政局發展，談判後來變得無疾而終，結果他就在巴黎待了幾年。在那段時間內，他發現自己數學和物理知識的貧乏，因此就在海根斯（*Christiaan Huygens*，1629～1695）的指導下，很快地補強了自己的不足，而且開始物理和數學方面的研究，包括創立他自己版本的微積分。後來因為他在巴黎找不到工作，只好於 1675 年接受布倫斯威克公爵（*Duke of Brunswick*）的雇用，前往德國的漢諾威（*Hanover*），行前他先繞道到倫敦，在這個時候他或許有機會看到牛頓關於微積分的一些工作，多年之後這趟倫敦之行就成了他的一個罪證。

萊布尼茲是從積分開始討論，他將面積視為很多塊小塊區域面積的總和。在他的筆記裡寫著，1675 年 11 月 11 日在積分上有了重大的突破，用積分的方法算出了 $y=x$ 下的面積。萊布尼茲發明了我們今天還在使用的符號：他用拉長的 S 來代表積分，因為「總和」的拉丁文是 *summa*；他用 d 來代表微差（*differential*），因為「差」的拉丁文是 *differentia*。這大概是他留給後人最大的數學遺產。在他的書裡，我們可以看見像

$$\int y\,dy=\frac{y^2}{2}$$

這樣和今天幾乎完全一樣的積分式子。萊布尼茲認為符號對於做學問是非常重要的，他甚至認為他所有在數學上的發現都是靠發明出好符號才做到的。相較於牛頓手稿上混亂的符號，他充分表現出這方面優秀的能力。到 1677 年時，萊布尼茲已經有一套完整的微積分理論，不過要等到 1684 年才得到贊助出版。

萊布尼茲拖到 1676 年底才到漢諾威上任，成為公爵的私人律師、史官、政治顧問和公爵圖書館的館長。萊布尼茲雖然不滿意漢諾威只是個一萬人的小鎮，但是因為布倫斯威克家族也具有選帝侯的身分，因此他家臣的身分也算是相當崇高。萊布尼茲深得布倫斯威克家族三代夫人小姐們的寵愛信任，尤其是公爵夫人蘇菲亞選帝女侯（*Electress Sophia*）。當時英國王室的血脈即將斷絕，1692 年萊布尼茲協助推動協議的 1701 王位繼承法案通過，使得蘇菲亞選帝女侯及其子孫成為英國王位繼承人。同時，萊布尼茲也花費很多時間在與他職務無關的學問追求上，他的工作讓他必須四處旅行，因此他有許多公式都是在顛簸的馬車上完成的。萊布尼茲持續和許多英國（及其他歐洲的）數學家通信，包括牛頓本人，這些行為布倫斯威克家族都容忍下來。萊布尼茲在數

學、科學上面的成就，讓他在外交、哲學等領域上的地位更加顯要。然而布倫斯威克家族的男主人們對萊布尼茲並不滿意，在 1687 年時，公爵恩斯特奧古斯特（*Ernst August*）要求萊布尼茲為布倫斯威克家族編寫一份家族史，以增加他們爭取王位的正當性。從 1687 到 1690 年，萊布尼茲走遍歐洲遍尋史籍資料和檔案，十年過去了，萊布尼茲卻什麼都沒交出來，讓繼任的公爵喬治路得威（*Georg Ludwig*）對萊布尼茲十分不滿。布倫斯威克家族要的只是一本輕薄短小、內容花俏的小冊子，最好兩、三年內就能完成。而外務極多的萊布尼茲想寫的是一本考據嚴謹的經典巨著，他終生沒有完成這項任務（註④）。

萊布尼茲在 1684 年及 1686 年出版了微積分方面的書籍，但是當時這套理論在德國沒有得到太多的注意。直到 1690 年，瑞士數學家伯努利兄弟（*Jacob and Johann Bernoulli of Basel*，1654～1705 及 1667～1748）運用這套方法得出了大量的結果與應用，從此微積分才變成了一個非常重要的計算工具。

微積分爭議

從 1709 年開始，牛頓和萊布尼茲的學生對於微積分的發明權這個問題開始爭吵。1711 年，牛頓的學生基爾在牛頓的默默鼓勵下，在英國皇家學會的雜誌上公開指控萊布尼茲剽竊牛頓在微積分方面的成果。萊布尼茲要求雜誌撤回這個控訴，因應萊布尼茲的要求，英國皇家學會展開調查。

整個爭論的焦點是，到底是萊布尼茲獨力發明了微積分的理論，抑或他只是把牛頓的想法用不同的符號表示出來？在調查的過程中，最令人訝異的是從頭到尾沒有人懷疑過牛頓是不是真如他自己宣稱的，早在萊布尼茲開始工作前就已經發明了通量這種概念。實際上牛頓也沒有任何具體的證據來支持他的說法。他只是曾經計算過一個切線的例子，然後宣稱他有一套完整的理論可以用來計算極值和重心等等。牛頓第一次向學生完整解釋他的理論，已經是二十年後，那時萊布尼茲的理論早已經廣為人知。他的手稿（不如說是寫給自己看的計算紙，牛頓從來沒有統一過他的符號）也是直到死後才公諸於世，年代已無法可考。萊布尼茲的理論是先發表的，之前沒有人挑戰過他的原創性。從他的論文和私人手稿裡，可以看出理論從不成熟到成熟完整的發展過程，所採取的方法和角度也和牛頓不盡相同，有些部分的結果還是和牛頓一起討論出來的。然而，萊布尼茲的確和牛頓的一些友人有書信來往，也極有可能在倫敦看過牛頓的一些手稿。多年之後，歷史學家在萊布尼茲的文件中發現他親手抄下一段牛頓論文的摘要，並且在旁邊用自己的微差符號重新表示一遍，只是沒有人知道這是在萊布尼茲發明自己的理論之前，還是之後。此外，萊布尼茲作為一個政治家和外交官的名聲很糟，他很喜歡使用詐術不擇手段，有多次捏造文件竄改日期的壞紀錄，這些都成為對他不利的罪狀。

英國皇家學會成立了一個委員會來決定到底是誰先發明了微積分，但是整個委員會有牛頓在背後控制，最後學會的結論傾向了牛頓。委員會對牛頓有利的報告書，甚至根本是牛頓自己撰寫的。雖然報告書是在 1713 年完成的，但是萊布尼茲到了 1714 年秋天才看到這個報告。這一年，萊布尼茲的雇主——公爵喬治路得威登基英國王位，成為英王喬治一世。雖然萊布尼茲是重要功臣，喬治一世卻禁止他隨行到倫敦，除非他至少先交出一冊（已經寫了三十年的）布倫斯威克家族史。此外，如果這個時候讓萊布尼茲到倫敦朝中，對剛贏得微積分爭議，聲望如日中天的牛頓是絕大的

侮辱。雪上加霜的是，同年萊布尼茲最重要的保護者和摯友蘇菲亞太后也過世了。1716 年萊布尼茲在漢諾威鬱鬱而終，當時雖然英王喬治一世就在漢諾威附近，也沒有去參加他的葬禮，葬禮上只有萊布尼茲的私人祕書，極為冷清。雖然萊布尼茲是英國皇家學會和柏林科學院的成員，這兩個機構都沒有為他舉辦追思會，他的墳墓無人聞問超過五十年。萊布尼茲過世以後，大部分的歐洲學者開始懷疑萊布尼茲在微積分上的成就，也使得人們開始忽略他在物理與數學上的成就。直到 1765 年，萊布尼茲的論文和信件又重新被出版，學者再一次審視他在各個領域的重要性。直到今天，萊布尼茲的文稿還是繼續在被整理著，身為一個重要思想家的地位已經確立。

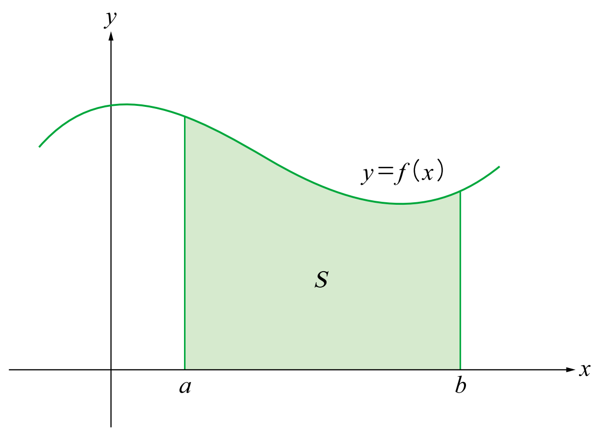
雖然在微積分爭議中，牛頓獲得了壓倒性的勝利，但是牛頓的勝利再加上民族主義作祟，使得英國數學家完全採用牛頓的符號，結果造成了英國數學一百五十年的停滯。而輸家萊布尼茲所使用的名詞和符號則實實在在活生生地被人們使用到今日（註⑤）。

今天對於微積分到底是誰發明的這件事上，一般的看法大概是認為微積分是由牛頓和萊布尼茲兩人分別獨力完成的。從萊布尼茲的著作上來看，他絕對有足夠的能力完成微積分基本定理。從歷史上來看，微積分的預備知識已經完備，牛頓和萊布尼茲本來就是水到渠成，何況他們兩人用的手法並不相同。

對牛頓而言，積分指的是對指定的通量（速度）找出流量的過程，因此隱含著微分和積分彼此是反運算這個事實。萊布尼茲則視積分為一個總和，他對於 dx 這種無窮小的量使用起來毫不忌諱。牛頓用的是速度 $\dot{x}$，避開了使用「無窮小」這種概念。牛頓的方法比較偏向幾何，而萊布尼茲的方法比較偏向分析。不過兩個人的作法以今日的眼光看起來都缺乏數學的嚴密性及深度，比較著重於應用。兩個人都是以直覺和隨意操縱符號的態度來處理他們的問題，他們的工具都無法處理分析方面更深層的問題。現在我們也用他們這種比較直觀的方式來看看微積分基本定理。

再訪微積分基本定理

定積分 $\int_a^b f(t)dt$ 指的是被 $y=f(x)$，x 軸，$x=a$ 及 $x=b$ 所包圍起來的區域的面積（見圖一）。在 $f(x)<0$ 的部分，面積要加個負號，當 b 在 a 的左邊時，面積也要加個負號。以下為了方便說明，我們會假設 $f(x)\geq 0$ 及 $a\leq b$。



圖一

微積分基本定理（第一型）

假設 f 是在〔a , b〕這個閉區間上的一個連續函數，而且 c 是〔a , b〕上的一個點。對於任意 $x\in$〔a , b〕，定義

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt。$$

那麼對於所有在開區間（a , b）裡的點 x，函數 $f(x)$ 是函數 $F(x)$ 的導函數。

由定義，$F(x)$的導函數是

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}。$$

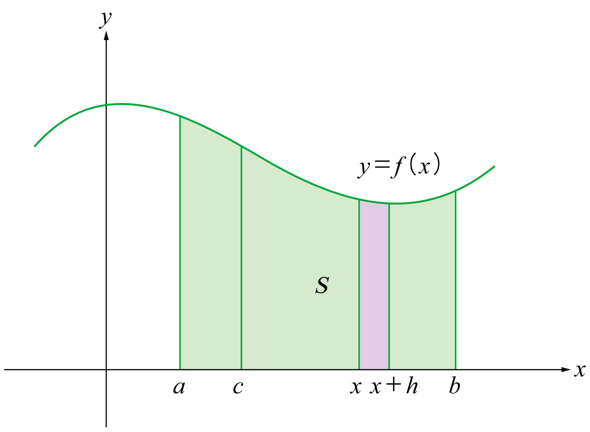
我們可以觀察到

$$F(x+h)-F(x)=\int_c^{x+h} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

是 $f(x)$ 介於 x 和 $x+h$ 之間的面積（見圖二），而這塊區域的寬度是 h。如果用 M 和 m 分別來代表 $f(x)$ 在〔x , $x+h$〕這段區間上的最大值和最小值，我們可以看出這塊面積是介於 Mh 和 mh 之間。也就是說，$f(x)$ 在〔x , $x+h$〕上面的平均高度是介於 M 和 m 之間。因為 $f(x)$ 是連續的，我們可以在〔x , $x+h$〕裡找到一個點 $\bar{x}$，使得 $f(\bar{x})$ 恰好是這一個平均高度（這其實是中間值定理）（註⑥），也就是說

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\bar{x})。$$

現在讓 h 越來越小，那麼 $\bar{x}$ 也會越來越靠近 x。因為 $f(x)$ 是連續函數，$f(\bar{x})$ 的值會趨近 $f(x)$。



圖二

用稍稍不同的說法，微積分基本定理可以改寫成另一個版本。

微積分基本定理（第二型）

假設 f 是在閉區間〔a , b〕上的一個連續函數，而 $G(x)$ 是這個區間上 $f(x)$ 的任何一個反導函數，那麼

$$\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)。$$

考慮在第一型中曾出現過的函數 $F(x)$。第一型告訴我們 $F(x)$ 和 $G(x)$ 同為 $f(x)$ 的反導函數，這兩個函數會相差某一個常數（這其實是由均值定理（註⑦）推導出來的一個結果）。讓我們寫成

$$F(x)=G(x)+C，\quad x\in〔a , b〕。$$

因此我們可以得到

$$\int_a^b f(t)dt=\int_c^b f(t)dt-\int_c^a f(t)dt=F(b)-F(a)$$

$$=(G(b)+C)-(G(a)+C)=G(b)-G(a)。$$

微積分基礎的建立

牛頓、萊布尼茲及之後的伯努利兄弟並沒有能力來討論中間值定理，他們的討論缺乏數學的嚴密性，所以當時的工作僅限於應用，無法處理更加複雜深刻的問題。1734 年一位愛爾蘭主教柏克萊（*George Berkeley*，1685～1753）首先攻擊牛頓微積分的理論缺乏基礎（*foundations*）。所謂的基礎指的是用一組精確的公設和定義及嚴格的邏輯推演來發展出一套理論的過程。微積分的基礎是由法國數學家柯西（*Augustin Louis Cauchy*，1789～1857）開始建構實數系統的完備性及極限（*limit*）嚴格的定義（註⑧）後才開始補強。

微積分是一個用來更精確了解空間、時間和運動本質的好工具，但是從古早以來，數學家和哲學家就被像是「除以 0」或是「無窮多個數的和」這類問題產生的矛盾現象所困惑，例如我們之前談過的古希臘哲學家芝諾就提出過好幾個例子。十五世紀時德國的紅衣主教尼可拉斯（*Nicholas of Cusa*，1401～1464）提出有限多個數的四則運算法則並不適用於無限多個數上面，暫時停止了對芝諾詭說的爭論。微積分的基礎，則提供了完整的工具來解決芝諾詭說的矛盾。

如果一個無窮的集合能夠與自然數一對

一對應，也就是說，我們可以一個、兩個、三個……慢慢地數，把這個集合裡的數每一個都數到，我們稱這個集合是「可數」的（*countable*）。如果辦不到，我們就說這個集合「不可數」（*uncountable*）。簡單來說，一個可數集合的元素和自然數一樣多，而一個不可數集合的元素則遠比自然數多。即使一樣是無窮大，有的無窮大其實比較大。例如實數 $\mathbb{R}$ 就是一個可數的集合，而實數 $\mathbb{R}$ 就是一個有名的不可數的集合。如果我們從一個裝滿所有實數的抽獎箱裡抽出一個有理數，就能夠得到一億元的獎金，那也不用高興，因為能夠中獎的機率其實是 0。

現在隨便給我們一個實數集合（集合裡的元素是由某些實數構成的），如果這個集合是有限的，我們知道怎樣把裡面的數加起來。但是如果這個集合裡有無窮多個數，我們就得想個新的辦法。如果這個集合是可數的，我們可以先將集合裡的數排序

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots\}。$$

當我們想把裡面的元素加起來，一個自然的做法就是考慮「部分和」

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n，$$

然後規定 S_n 的極限就是我們想要的總和 $\sum a_i$。細心的人可能會懷疑這樣求出來的總和不會和最初的排序有關。的確，有些病態的例子確實會造成問題，不同的排序會得到不同的總和，因此當我們要討論（可數的）無窮多個數的和，加總的順序必須要說得明確。不過至少當這些數都是正數的時候，加總的順序並不會影響總和。因此當一個實數集合是可數的時候，我們是有一個可行的方法來把裡面的數加起來。然而當這個實數集合是不可數的時候，以上的方法就變得不可行了。有興趣更深入瞭解這個課題的讀者，可以參考實變數分析方面的書籍。

現在再讓我們回頭看看之前所提過芝諾的飛箭詭說。芝諾將一段時間（區間）分成無數多個瞬間（點），每一個瞬間飛箭移動的距離是 0，因此他推論在整段時間內飛箭所移動的距離是將所有的 0 加起來，飛行的總距離還是 0。但是這裡芝諾犯了一個錯誤，一個區間是由不可數個點所構成的，也就是說一段時間是由不可數個瞬間所集合而成的。因此草率地用可數的態度去將不可數個 0 加起來是錯誤的。

從柯西以降，微積分的基礎已經大致完備，只是還有一些細微的問題到今天仍是研究的課題。雖然歷史上還有其他建構微積分基礎的方法，但還是以實數完備性及極限這個角度來處理較為常見，而「無窮小」、「無窮多」這些概念已經完全被「極限」所取代。柯西、黎曼（*Georg Friedrich Bernhard Riemann*，1826～1866）、魏爾施特拉斯（*Karl Theodor Wilhelm Weierstraß*，姓氏亦可寫作*Weierstrass*，1815～1897）、勒貝格（*Henri Léon Lebesgue*，1875～1941）等十九世紀的數學家就是這樣嚴密地建立起我們今日所熟知的微積分與數學分析。

◎附註

①劉徽對畢氏定理的證明和畢達哥拉斯完全相同。劉徽為測量學所作的《島算海經》（原名《九章重差圖》），原來是《劉徽九章算術注》第九卷〈勾股〉（畢氏定理，直角三角形）內容的延續和發展，附在《劉徽九章算術注》的後面作為第十章，書中顯示出劉徽在三角函數上面強大的計算能力。再加上《九章算術》中所提供的代數工具，劉徽能夠精確地估計 π，令人毫不驚訝。

②羅比達自己的拼法是 *l'Hospital*，但因為 s 不發音，現代法文的拼法就改成 *l'Hôpital*。

③選帝侯是歐洲一群地位特別尊貴的貴族，他們有權可以選出神聖羅馬帝國的新皇帝。選帝侯通常是重要的教廷人員或具有皇族血統的貴族。

④萊布尼茲已經完成的部分在一百年之後出版，內容已達三冊之多。

⑤牛頓和萊布尼茲兩人之間的恩恩怨怨被作家 *Neal Stephenson* 寫入他的小說 *The Baroque Cycle* 中，雖然很多人視這套小說為考據嚴謹的歷史小說，作者本人卻認為這套小說為科幻小說。

⑥中間值定理：假設 f 是〔a , b〕這個閉區間上的一個連續函數，而且 K 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的一個數，那麼我們可以在〔a , b〕裡面找到一個點 c 使得 $f(c)=K$ 。

⑦均值定理：假設 f 在〔a , b〕上連續而且在（a , b）上可微，那麼我們可以在（a , b）裡面找到一個點 c 使得

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。從均值定理我們可以導出，如果兩個函數的導函數相同，那麼這兩個函數就會相差一個常數。

⑧1817 年，波爾查諾（*Bernhard Bolzano*，1781～1848）是世界上第一個使用 ε-δ 的定義來證明中間值定理的人，不過因為他的作品在生前無法出版，所以影響力有限。柯西在 *Cours d'analyse*（1821）這本書裡模糊地表達出了極限的意義。我們今天使用的 ε-δ 的定義是由魏爾施特拉斯在 1850 年間發表的。極限 lim 這個符號則是由英國數學家哈代（*Godfrey Harold Hardy*，1877～1947）於 1908 年在 *A Course of pure Mathematics* 這本書中提出。

◎參考資料

1. Carl Boyer, Uta Merzbach and Issac Asimov, *A History of Mathematics*, Wiley, 2nd ed., 1997
2. 郭書春，劉鈍校點，*算經十書*，九章出版社，2001
3. George MacDonald Ross, *Leibniz*（*Past Masters*），Oxford University Press, USA, 1984
4. Jason Socrates Bardi, *The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time*, Thunder's Mouth Press, 2007
5. G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Rough Draft Printing, 2007